APELLIDOS: NOMBRE:

ÁLGEBRA LINEAL - 1S2M (29/10/2012)

Parcial I, Puntuación 30 %

1. **(6 puntos)** Sean $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

   Sea $\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (i) Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_1}$, vector de coordenadas de $\bar{x}$ respecto de la base $\mathcal{B}_1$.

   (ii) Calcular $P = \mathcal{C}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, matriz de cambio de base, de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$.

   (iii) Utilizando la matriz P, obtener $\bar{x}_{\mathcal{B}_2}$, vector de coordenadas de $\bar{x}$ respecto de la base $\mathcal{B}_2$.

Solución

(i) Para calcular las coordenadas del vector $\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ respecto de la base $\mathcal{B}_1$ se resuelve el siguiente sistema:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},$$

siendo su matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \underset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{(3)}{\sim}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{(4)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

donde
(1) $F_2 \to F_2 - 2F_1$, $F_3 \to F_3 - F_1$, (2) $F_2 \to -F_2$, $F_3 \to \frac{1}{2}F_3$, (3) $F_1 \to F_1 + F_3$, $F_2 \to F_2 + 3F_3$, y (4) $F_1 \to F_1 - F_2$.
Las coordenadas del vector $\bar{x}$ respecto de la base $\mathcal{B}_1$ son la solución del sistema anterior. Por tanto, se tiene $\bar{x}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(ii) Las columnas de la matriz $P = \mathcal{C}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ de cambio de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$, son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}_1$ respecto de $\mathcal{B}_2$. La resolución de los tres sistemas de ecuaciones lineales que determinan dichas coordenadas se puede realizar conjuntamente de la siguiente forma:

$$(\mathcal{B}_2|\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\sim}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{(4)}{\sim}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

donde

(1) $F_3 \to F_3 - F_1$, (2) $F_3 \to F_3 - 2F_2$, (3) $F_1 \to F_1 - F_3$, $F_2 \to F_2 + F_3$, y (4) $F_1 \to F_1 + F_2$.

Por tanto, se tiene $\mathcal{C}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Si $P = \mathcal{C}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, entonces se verifica $\bar{x}_{\mathcal{B}_2} = P\bar{x}_{\mathcal{B}_1}$.

Por consiguiente, $\bar{x}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$.

2. **(8 puntos)** Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$,

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ x - z - t = 0 \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad S_2 = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

se pide:

(i) Hallar una base de S_1.

(ii) Hallar unas ecuaciones implícitas de S_2.

(iii) Hallar una base de $S_1 + S_2$.

(iv) Analizar si $S_1 + S_2$ es suma directa y si S_1 y S_2 son subespacios complementarios.

Solución

(i) Para hallar una base de S_1 se resuelve el sistema formado por sus ecuaciones implícitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix},$$

donde (1) $F_2 \to F_2 - F_1$ y (2) $F_1 \to F_1 + F_2$.

El sistema inicial es equivalente al siguiente sistema, que puede resolverse mediante sustitución regresiva:

$$\left\{\begin{array}{rl} x - z - t = & 0 \\ y - 2z - t = & 0 \end{array}\right. \underset{z=\alpha,\, t=\beta}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rl} x = & \alpha + \beta \\ y = & 2\alpha + \beta \\ z = & \alpha, \\ t = & \beta \end{array}\right. , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in S_1 \Longleftrightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el siguiente conjunto de vectores, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, es un sistema de generadores de S y sus vectores son linealmente independientes. En consecuencia, dicho conjunto es una base de S_1,

$$\mathcal{B}_{S_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) El conjunto de vectores que generan S_2 es linealmente independiente, luego constituye una base del subespacio S_2,

$$\mathcal{B}_{S_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para determinar unas ecuaciones implícitas de S_2, en primer lugar se obtendrán unas ecuaciones paramétricas de S_2 utilizando los vectores de la base $\mathcal{B}_{S_2}$ y, a continuación, se eliminarán parámetros en estas ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in S_2 \Longleftrightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & -1 & | & y \\ 1 & -2 & | & z \\ 1 & 0 & | & t \end{pmatrix}.$$

Para establecer esta igualdad de rangos se realizan las siguientes operaciones elementales por filas sobre la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & -1 & | & y \\ 1 & -2 & | & z \\ 1 & 0 & | & t \end{pmatrix} \underset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & -1 & | & y \\ 0 & -3 & | & z-x \\ 0 & -1 & | & t-x \end{pmatrix} \underset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & -1 & | & y \\ 0 & 0 & | & z-x-3y \\ 0 & 0 & | & t-x-y \end{pmatrix},$$

donde (1) $F_3 \to F_3 - F_1$, $F_4 \to F_4 - F_1$, y (2) $F_3 \to F_3 - 3F_2$, $F_4 \to F_4 - F_2$.
En consecuencia,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in S_2 \Longleftrightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{rl} x+3y-z = & 0 \\ x+y-t = & 0 \end{array} \right. \quad \text{Ecs. implícitas de } S_2}$$

(iii) El subespacio vectorial suma S_1+S_2 está generado por la unión de un sistema de generadores de S_1 y un sistema de generadores de S_2, es decir, $S_1+S_2 = \mathcal{L}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ donde

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora se extrae el máximo conjunto de vectores linealmente entre los vectores generadores de S_1+S_2. Para ello, se estudia el rango de la matriz A, cuyas columnas son dichos vectores generadores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix},$$

donde (1) $F_2 \to F_2 - 2F_1, F_3 \to F_3 - F_1$, (2) $F_3 \to F_3 - F_2, F_4 \to F_4 + F_2$, y (3) $F_4 \to F_4 + \frac{1}{2}F_3$.

Por tanto, rango$(A) = 4$, luego los cuatro vectores generadores de S_1+S_2 son linealmente independientes y forman una base de S_1+S_2, esto es, $\mathcal{B}_{S_1+S_2} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$.

(iv) A la vista de las bases obtenidas en los apartados anteriores se deduce que $\dim(S_1) = 2$, $\dim(S_2) = 2$ y $\dim(S_1+S_2) = 4$. Utilizando la fórmula de las dimensiones para subespacios vectoriales, $\dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1+S_2) = 2+2-4 = 0$. Se tiene entonces que $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$, luego S_1+S_2 es suma directa. Por otra parte, teniendo en consideración que $S_1+S_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ y $\dim(S_1+S_2) = 4$, se verifica que $S_1+S_2 = \mathbb{R}^4$. En consecuencia, los subespacios S_1 y S_2 de $\mathbb{R}^4$ son complementarios ya que $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$ y $S_1+S_2 = \mathbb{R}^4$.

3. Dado el subespacio vectorial $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rl} x+y= & 0 \\ x-z-t= & 0 \end{array} \right\}$ y $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, se pide:

(i) **(2 puntos)** Determinar una base de $S^{\perp}$, subespacio complementario ortogonal de S.

(ii) **(4 puntos)** Obtener la proyección ortogonal del vector $\bar{u}$ sobre el subespacio S.

(iii) **(2 puntos)** Expresar el vector $\bar{u}$ como suma de dos vectores, uno de ellos del subespacio S y el otro del subespacio $S^{\perp}$.

(iv) **(2 puntos)** Calcular la distancia y el ángulo entre el vector $\bar{u}$ y el subespacio S.

Solución

(i) Denotando por $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, el subespacio vectorial dado es

$$S = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^4 : < \bar{x}, \bar{u}_3 >= 0, < \bar{x}, \bar{u}_4 >= 0 \right\} = \left(\mathcal{L} \left\{ \bar{u}_3, \bar{u}_4 \right\} \right)^{\perp}.$$

Por tanto, $S = \mathcal{L}\{\bar{u}_3, \bar{u}_4\}$. Además, $\{\bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ es linealmente independiente ya que los vectores $\bar{u}_3$ y $\bar{u}_4$ no son proporcionales. En consecuencia, $\mathcal{B}_{S^{\perp}} = \{\bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ es una base de $S^{\perp}$.

(ii) La base $\mathcal{B}_{S^{\perp}} = \{\bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ obtenida en el apartado (i) no es base ortogonal porque $< \bar{u}_3, \bar{u}_4 >\neq 0$. Para obtener una base ortogonal del subespacio $S^{\perp}$ se aplicará el método de Gram-Schmidt sobre la base $\mathcal{B}_{S^{\perp}}$:

$$\begin{array}{rl} \bar{v}_3 = & \bar{u}_3, \\ \bar{v}_4 = & \bar{u}_4 - \frac{<\bar{u}_4, \bar{v}_3>}{<\bar{v}_3, \bar{v}_3>} \bar{v}_3. \end{array}$$

Teniendo en cuenta que $\bar{v}_3 = \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $< \bar{u}_4, \bar{v}_3 >= 1$ y $< \bar{v}_3, \bar{v}_3 >= 2$, se obtiene

$$\bar{v}_4 = \bar{u}_4 - \frac{1}{2} \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, una base ortogonal del subespacio $S^{\perp}$ es

$$\mathcal{B}'_{S^{\perp}} = \left\{ \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_4 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Denotando por $p_S(\bar{u})$ la proyección ortogonal del vector $\bar{u}$ sobre el subespacio S y utilizando la base ortogonal de $S^{\perp}$, $\mathcal{B}'_{S^{\perp}} = \{\bar{v}_3, \bar{v}_4\}$, se tiene

$$p_S(\bar{u}) = \bar{u} - \frac{< \bar{u}, \bar{v}_3 >}{< \bar{v}_3, \bar{v}_3 >} \bar{v}_3 - \frac{< \bar{u}, \bar{v}_4 >}{< \bar{v}_4, \bar{v}_4 >} \bar{v}_4.$$

Puesto que $<\bar{u},\bar{v}_3>=2$, $<\bar{v}_3,\bar{v}_3>=2$, $<\bar{u},\bar{v}_4>=-2$, $<\bar{v}_4,\bar{v}_4>=\frac{5}{2}$, resulta

$$p_S(\bar{u}) = \bar{u} - \bar{v}_3 + \frac{4}{5}\bar{v}_4 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -2/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

(iii) Se verifica que $\bar{u} = p_S(\bar{u}) + (\bar{u} - p_S(\bar{u}))$, donde

$$p_S(\bar{u}) = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -2/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \in S, \qquad \bar{u} - p_S(\bar{u}) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/5 \\ 4/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \in S^{\perp}.$$

En consecuencia,

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -2/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/5 \\ 4/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}.$$

(iv) La distancia entre $\bar{u}$ y S es

$$d\left(\bar{u}, S\right) = d\left(\bar{u}, p_S(\bar{u})\right) = \|\bar{u} - p_S(\bar{u})\| = \left\| \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/5 \\ 4/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

El ángulo α entre $\bar{u}$ y S es el único $\alpha \in [0,\pi]$ tal que

$$\cos\alpha = \frac{<\bar{u}, p_S(\bar{u})>}{\|\bar{u}\|\|p_S(\bar{u})\|} = \frac{\frac{2}{5}}{2\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

4. **(6 puntos)** Encontrar la recta que mejor se ajusta, en mínimos cuadrados, al siguiente conjunto de datos experimentales de coordenadas (x, y): $\{(-1,1),(1,1),(2,3),(3,3)\}$.

Solución Si los puntos dados pertenecieran a una recta de ecuación $y = \alpha + \beta x$, los valores α y β deberían satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha - \beta & = 1 \\ \alpha + \beta & = 1 \\ \alpha + 2\beta & = 3 \\ \alpha + 3\beta & = 3 \end{cases}.$$

En primer lugar se comprueba que el sistema es incompatible. Para ello, se calcula el rango de A, matriz de coeficientes, y el rango de $(A|\bar{b})$, matriz ampliada de este sistema:

$$(A|\bar{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & | & 2 \\ 0 & 4 & | & 2 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & | & 2 \\ 0 & 4 & | & 2 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix},$$

donde (1) $F_2 \to F_2 - F_1$, $F_3 \to F_3 - F_1$, $F_4 \to F_4 - F_1$, (2) $F_2 \to \frac{1}{2}F_2$, y (3) $F_3 \to F_3 - 3F_2$, $F_4 \to F_4 - 4F_2$.

Se tiene entonces que rango$(A) = 2$ y rango$(A|\bar{b}) = 3$. Por ser estos rangos distintos, el sistema es incompatible y no existe $\bar{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ solución de $A\bar{x} = \bar{b}$.

A continuación, se utilizará el hecho de que el conjunto de soluciones aproximadas por mínimos cuadrados, $\bar{x}' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$, del sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ coincide con el conjunto de soluciones del sistema $A^t A\bar{x}' = A^t\bar{b}$. En este caso, el sistema correspondiente a $A^t A\bar{x}' = A^t\bar{b}$ es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior,

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & | & 8 \\ 5 & 15 & | & 15 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 5 & | & 8 \\ 1 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 3 \\ 4 & 5 & | & 8 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\sim}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & -7 & | & -4 \end{pmatrix} \underset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & 4/7 \end{pmatrix} \underset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 9/7 \\ 0 & 1 & | & 4/7 \end{pmatrix},$$

donde (1) $F_2 \to \frac{1}{5}F_2$, (2) $F_2 \leftrightarrow F_1$, (3) $F_2 \to F_2 - 4F_1$, (4) $F_2 \to \frac{-1}{7}F_2$, y (5) $F_1 \to F_1 - 3F_2$.
Entonces, $\alpha' = \frac{9}{7}$ y $\beta' = \frac{4}{7}$.

Por tanto, la recta que mejor se ajusta en mínimos cuadrados al conjunto de datos que se proporcionan es la de ecuación

$$y = \frac{9}{7} + \frac{4}{7}x.$$

Su representación gráfica se muestra en la siguiente figura: